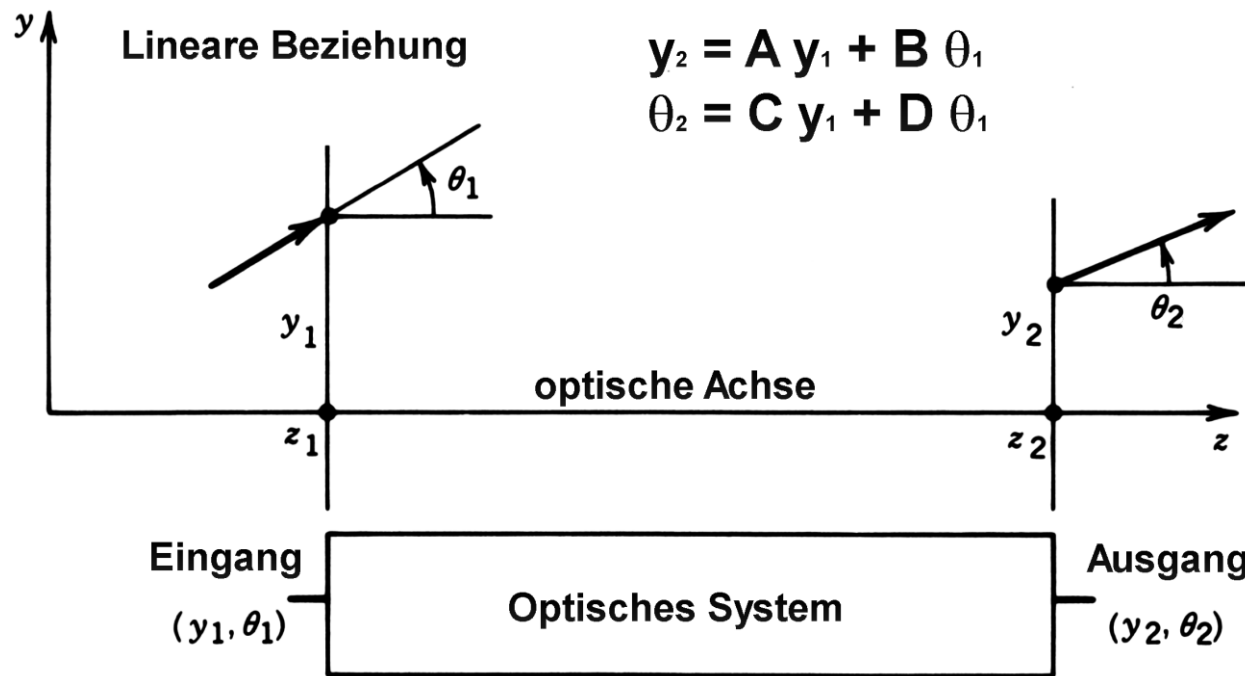


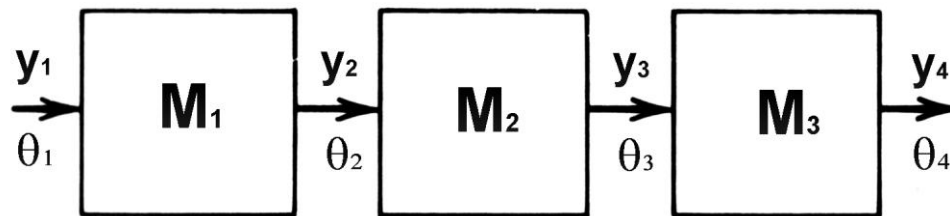
Matrixmethode (ray tracing)



Die Wirkung eines optischen Elements (Strecke, Linse...) auf einen Lichtstrahl mit den Eingangskordinaten $\underline{v}_1 = (y_1, \theta_1)$ wird durch eine Matrix M (Transfermatrix) angegeben.

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Die Elemente der Matrix beschreiben die lineare Abhängigkeit der Ausgangskordinaten $\underline{v}_2 = (y_2, \theta_2)$ von den Eingangskordinaten

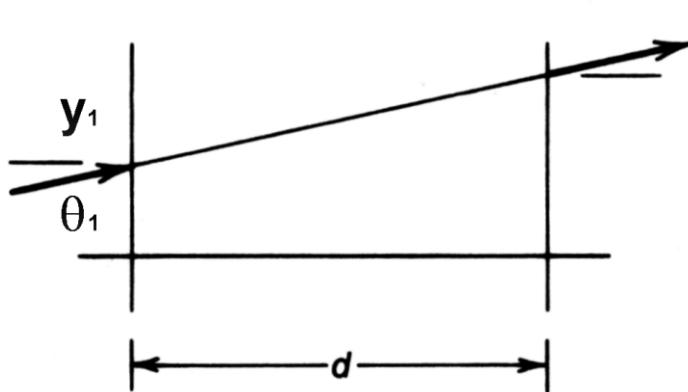


1. Element: $\underline{v}_2 = M_1 \underline{v}_1$
2. Element: $\underline{v}_3 = M_2 \underline{v}_2$
3. Element: $\underline{v}_4 = M_3 \underline{v}_3$

oder auch: $\underline{v}_4 = M_3 M_2 M_1 \underline{v}_1$ $\underline{v}_4 = M_{\text{Ges}} \underline{v}_1$ $M_{\text{Ges}} = M_3 M_2 M_1$ Reihenfolge !

Ray tracing: nehme ein Strahlenbündel, d. h. beliebige Eingangskordinaten $\underline{v}_i = (y_i, \theta_i)$ und untersuche die Wirkung eines optischen Systems mit M_{Ges} auf jeden einzelnen Lichtstrahl

Einzelelemente



$$y_2 = d \theta_1 + y_1$$

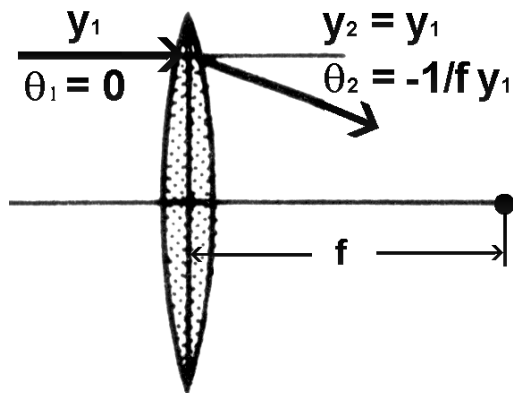
$$\theta_1 = \theta_2$$

Driftstrecke

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Winkel θ bleibt erhalten

Ortskoordinate y ändert sich gemäß der Länge von d



Dünne Linse

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

Wirkung direkt am Element ! Kleine Winkel: $\sin \theta = \theta$

Ortskoordinate y bleibt erhalten

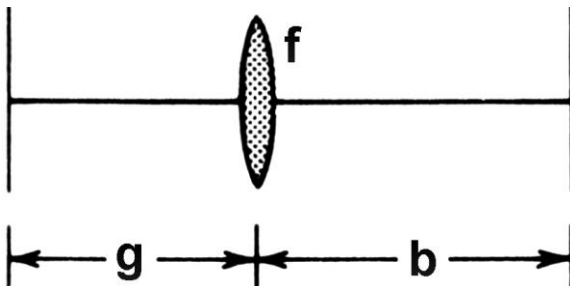
Winkel θ ändert sich als Funktion der Ortskoordinate

Beispiel Transfermatrix

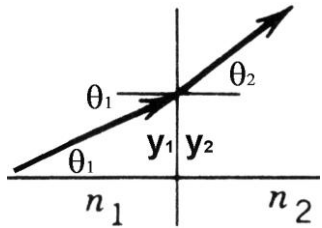
Driftstrecke – dünne Linse - Driftstrecke

$$\begin{pmatrix} 1 - b/f & (g - bg/f + b) \\ -1/f & (1 - g/f) \end{pmatrix}$$

wann gilt: $y_2 = 0$?



Lichtbrechung



Gerade Grenzfläche

An der Grenzfläche:

mit $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$ (Snellius) $\Rightarrow \theta_2 = n_1/n_2 \theta_1$

$$y_2 = y_1$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1/n_2 \end{bmatrix}$$

Brechung an Kugelfläche

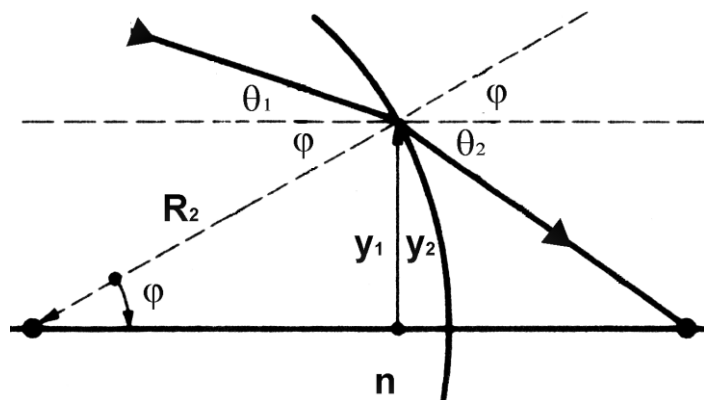
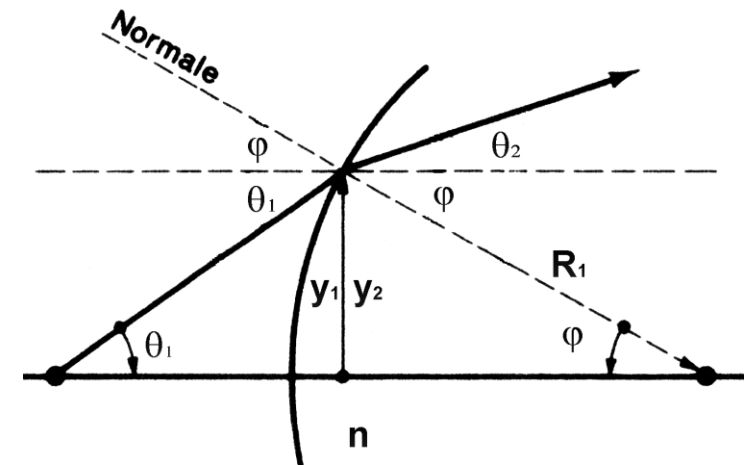
Ortstransformation: $y_2 = y_1$

Winkel: $(\theta_1 + \varphi) = n (\theta_2 + \varphi)$ (Snellius)

$$\varphi = y_1/R_1$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \varphi \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \frac{1}{n} \theta_1 = \frac{1-n}{nR_1} y_1 + \frac{1}{n} \theta_1$$

$$\Rightarrow M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$



$$y_2 = y_1$$

$n (\theta_1 + \varphi) = \theta_2 + \varphi$ (Snellius)

$$\Rightarrow \theta_2 = n \theta_1 + (n-1) \varphi = n \theta_1 + \frac{n-1}{R_2} y_1$$

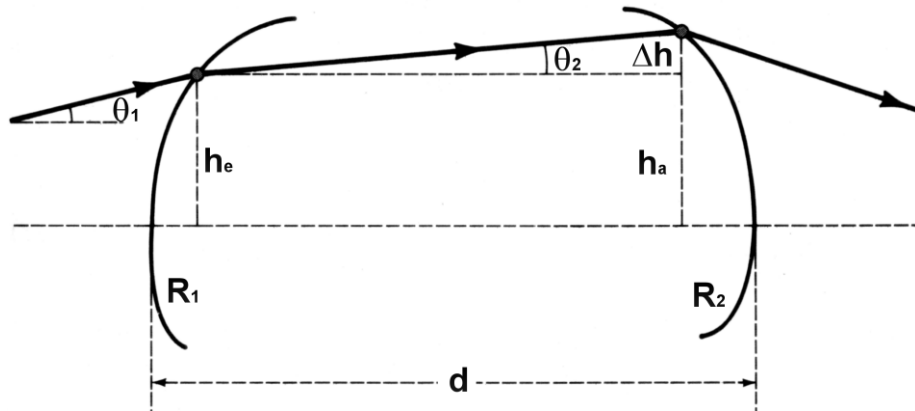
$$\Rightarrow M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{bmatrix}$$

Dünne Linse:

$$M = M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1)(1/R_1 - 1/R_2) & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Linsenschleiferformel $1/f = (n-1) (1/R_1 - 1/R_2)$ R_2 negativ!

Dicke Linse



Linse der Dicke d

Transfer-(System-)Matrix: M_{Ges}

$$M_{\text{Ges}} = M_3 M_2 M_1$$

Wir setzen $R = R_1 = -R_2$ (symmetrische Linse)

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1-n)/R & 1/n \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1-n)/(nR) & n \end{bmatrix}$$

Es gilt: $\det M_1 = 1/n$ $\det M_2 = 1$ $\det M_3 = n$

mit $\det M_{\text{Ges}} = \det M_1 \det M_2 \det M_3 = (1/n) \cdot 1 \cdot n = 1 \Rightarrow \det M_{\text{Ges}} = 1$

$$\Rightarrow M_{\text{Ges}} = \begin{bmatrix} 1 + d \frac{1-n}{n \cdot R} & d/n \\ \left[2 \frac{1-n}{R} + d \frac{(1-n)^2}{n \cdot R^2} \right] & \left[\frac{d(1-n)}{n \cdot R} + 1 \right] \end{bmatrix}$$

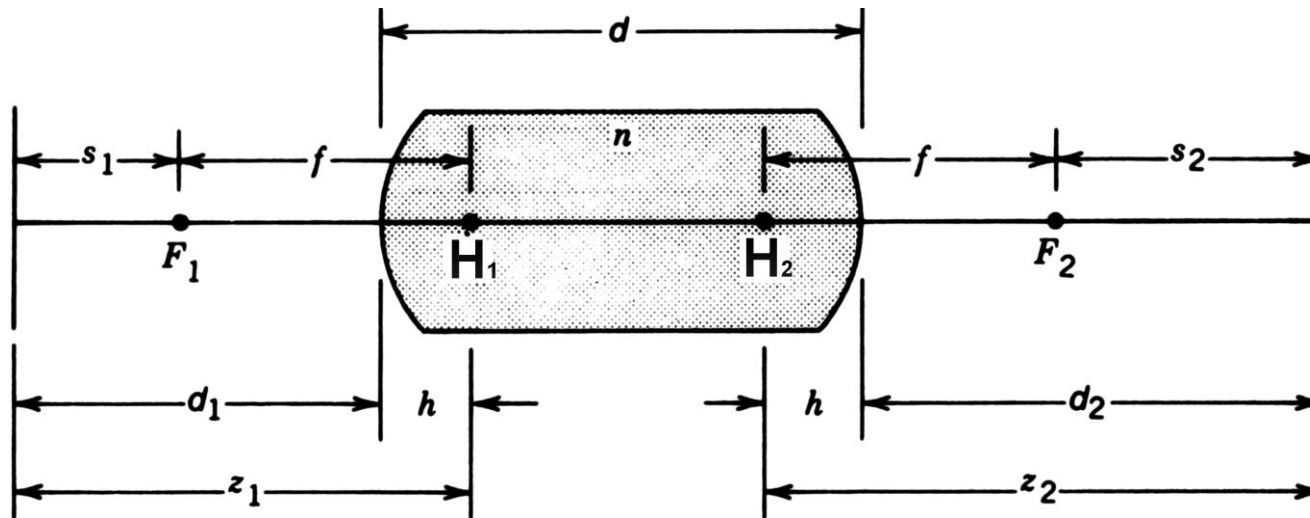
$$\det M_{\text{Ges}} = 1$$

Check Matrix Multiplikation

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = 2 \frac{n-1}{R} - \frac{d(n-1)^2}{n \cdot R^2} = \frac{1}{f_{\text{dünne Linse}}} - \frac{d(n-1)^2}{n \cdot R^2}$$

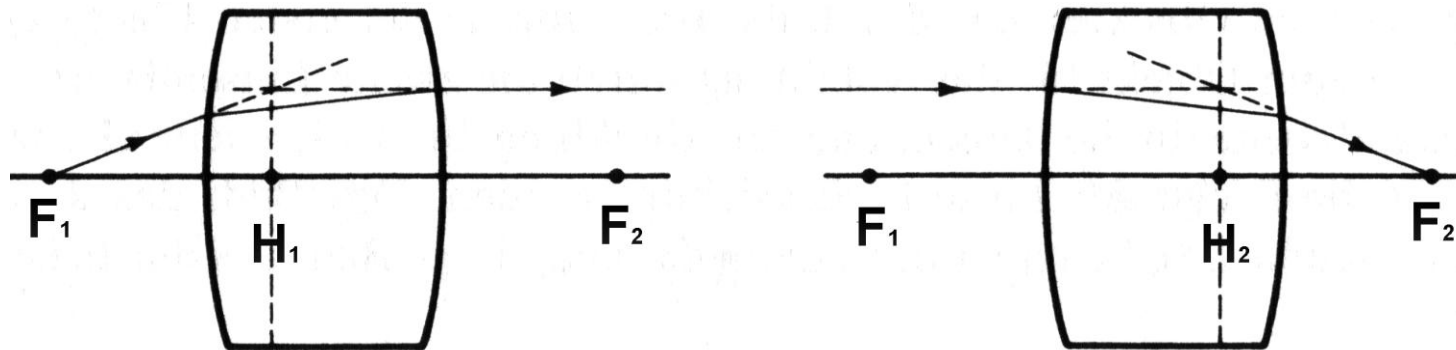
dünne Linse: beide Radien gleich

Dicke Linse, Hauptebenen



Bei dicken Linsen (optischen Systemen) gelingt die Konstruktion der Abbildung erst, wenn die Lagen der Hauptebenen relativ zu den geometrischen Abmessungen der Linse bekannt sind

Bedeutung der Hauptebenen eines optischen Systems: formale Grenzebenen für Lichtbrechung



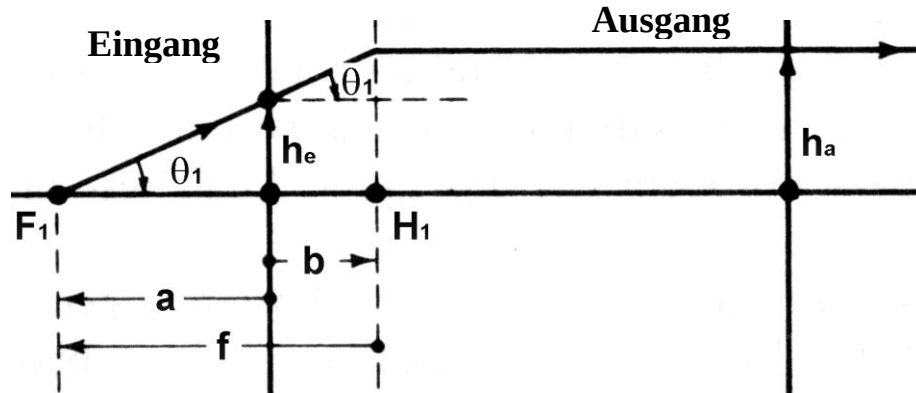
Anmerkung: die Hauptebenen können weit außen liegen, sie können sogar vertauscht sein

Die Systemmatrix der Linse gewinnt man durch Matrixmultiplikation

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = R_2 D R_1$$

Dicke Linse, Hauptebenen

Annahme: die Elemente der Systemmatrix $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ seien bekannt. Dann gilt:



$$h_a = A h_e + B \theta_1$$

$$\theta_2 = 0 = C h_e + D \theta_1 \Rightarrow h_e = -\frac{D}{C} \theta_1$$

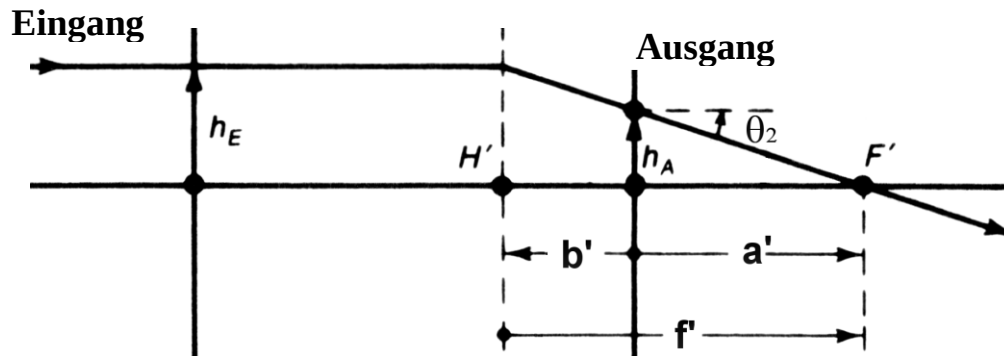
$$\text{kleine Winkel: } \theta_1 = h_e/a \Rightarrow a = h_e/\theta_1 = -\frac{D}{C}$$

$$\text{mit } \theta_1 = h_a/f \Rightarrow$$

$$f = h_a/\theta_1 = \frac{A h_e + B \theta_1}{\theta_1} = B + A h_e/\theta_1 = B - \frac{AD}{C} = -\frac{AD - BC}{C} = -\frac{\det M}{C} = -\frac{1}{C} \quad (\text{siehe oben})$$

aber: die Entfernung der Brennweite wird von der Hauptebene aus gemessen !

Objektseitiger Hauptebenenabstand: $b = f - a = -\frac{D}{C} + \frac{1}{C} = \frac{1-D}{C}$



$$h_a = A h_e$$

$$\theta_1 = 0$$

$$\theta_2 = C h_e$$

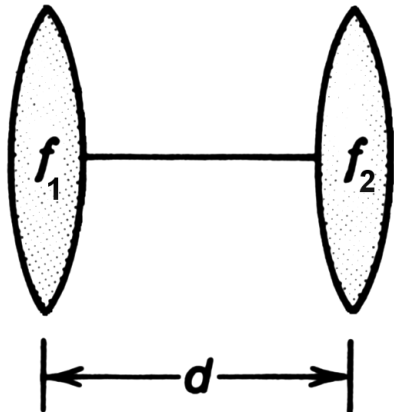
$$\theta_2 = h_a/a'$$

$$f' = a' + b' = 1/C$$

$$a' = A/C$$

$$b' = (A-1)/C$$

Transfermatrix von zwei dünnen Linsen



Zwei dünne Linsen mit f_1 und f_2 im Abstand d
Die Ausdehnung der Linsen wird vernachlässigt

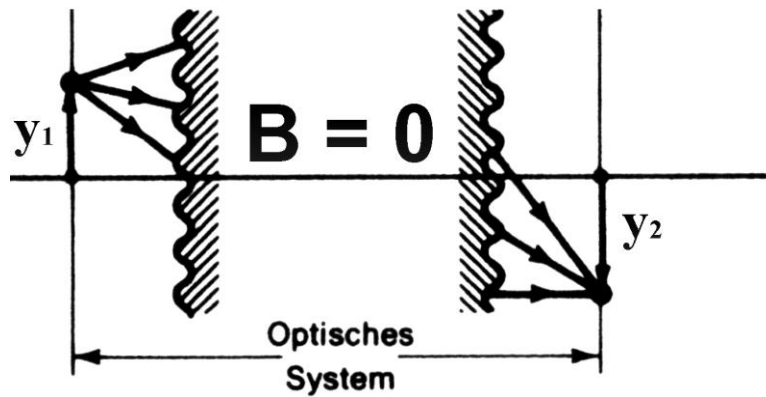
$$M_3 M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix}$$

Gesamtmatrix: $M_{\text{Ges}} = M_3 M_2 M_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

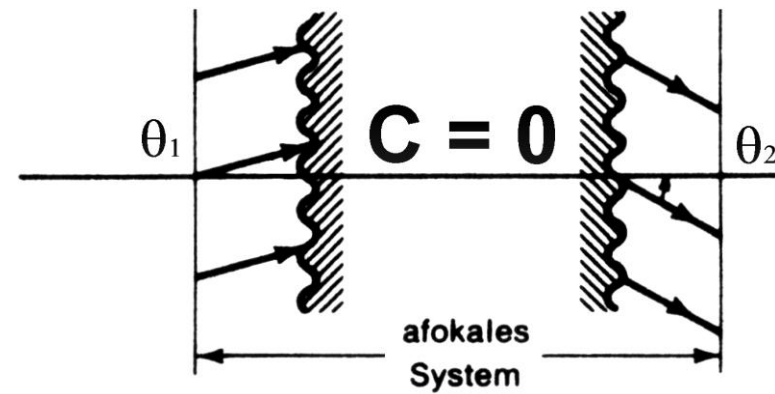
$$\Rightarrow M_{\text{Ges}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ \left[-\frac{1}{f_1} + \frac{d}{f_1 \cdot f_2} - \frac{1}{f_2} \right] & 1 - \frac{d}{f_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{f_{\text{Ges}}} = -C = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}$$

$$\text{für } f = f_1 = f_2 \Rightarrow f_{\text{Ges}} = f / (2 - d/f)$$

Bedeutung der Matrixelemente

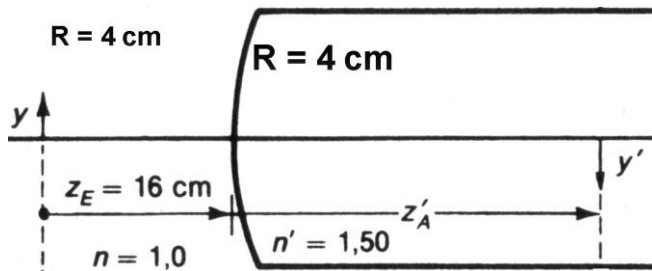


$y_2 = A y_1$: Bildgröße y_2 unabhängig von θ_1
 Abbildungsmaßstab $A = y_2/y_1$



$\theta_2 = D \theta_1$: Winkel θ_2 unabhängig von y_1
 Winkelvergrößerung $D = \theta_2/\theta_1$

Beispiel



Polymerstab mit $n = 1,5$, Kugelfläche $R = 4$ cm
 Wo entsteht Bild, Abbildungsmaßstab ?

$$M = \begin{bmatrix} 1 - z'_A/12 & 16 - 2/3 z_A \\ -1/12 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow z_A = 24$ cm, $A = -1$

Beispiel: Kepler'sches Fernrohr

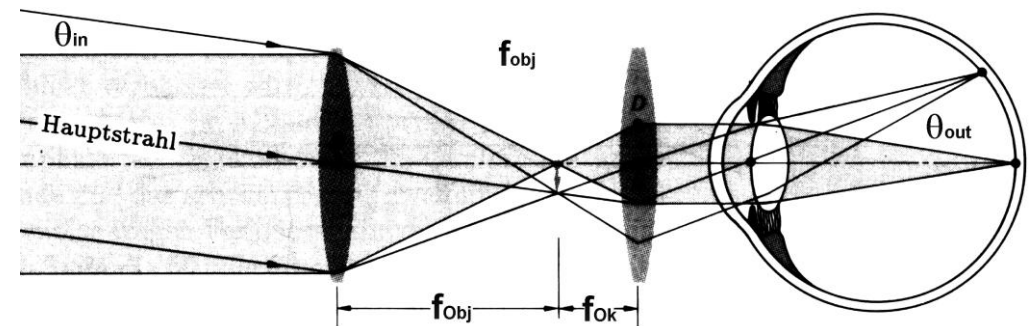
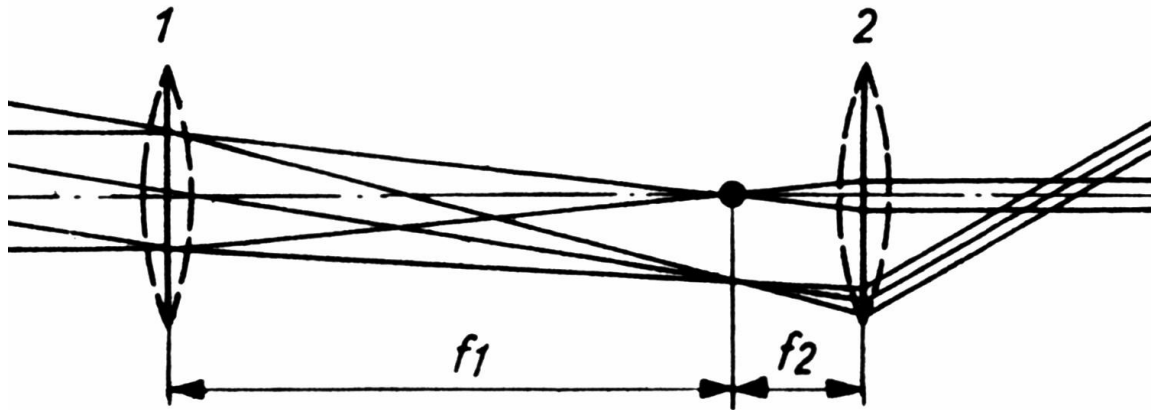


Abbildung paralleler Strahlen aus ∞
 in parallele Ausgangsstrahlen ($C = 0$)

Winkelvergrößerung: $D = f_{\text{Obj}}/f_{\text{Ok}}$

Beweis mit $M = F_{\text{Ok}} D_{\text{Ok}} D_{\text{Ob}} F_{\text{Ob}}$

Zwei dünne Linsen: Sonderfälle

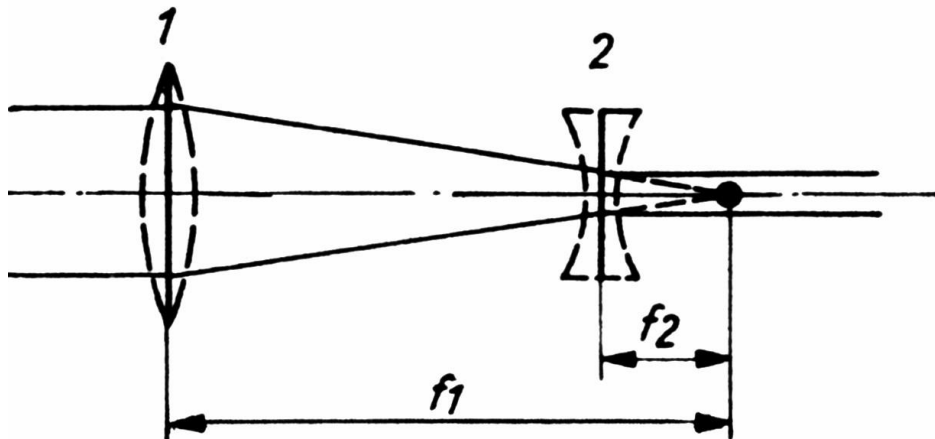


Kepler'sches Fernrohr

$$d = f_1 + f_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_{\text{Ges}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} = 0$$

Winkelvergrößerung: $M_{22} = -f_1/f_2$



Galilei'sches Fernrohr

$$d = f_1 - f_2$$

f_2 ist Zerstreuungslinse

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/f_2 & 1 \end{bmatrix}$$

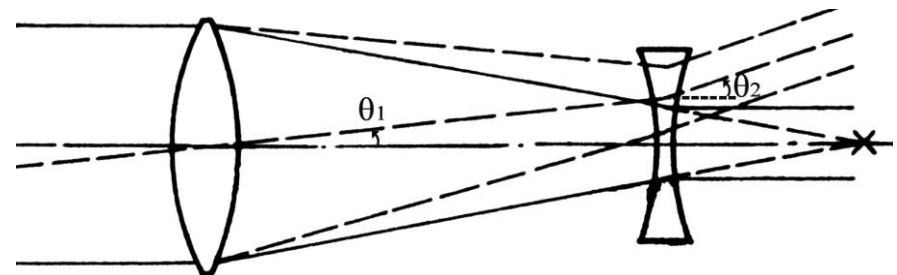
$$\Rightarrow \text{ersetze } -\frac{1}{f_2} \rightarrow \frac{1}{f_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_{\text{Ges}}} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} = 0$$

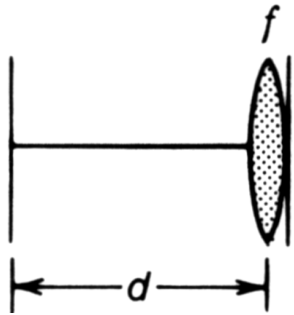
Galilei:

$$\Rightarrow M_{\text{Ges}} = \begin{pmatrix} f_2/f_1 & f_1 - f_2 \\ 0 & f_1/f_2 \end{pmatrix}$$

Winkelvergrößerung: $M_{22} = f_1/f_2$ aufrecht !



Periodisches optisches System (Teleskopisches System)



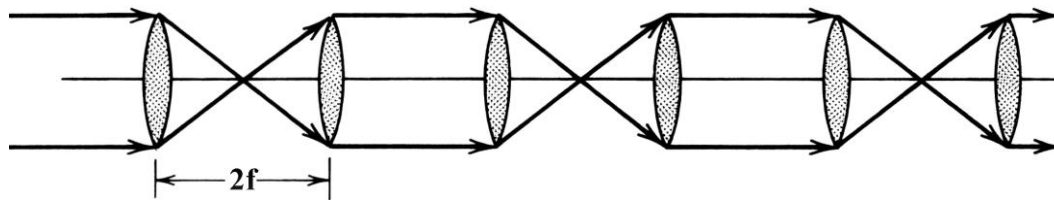
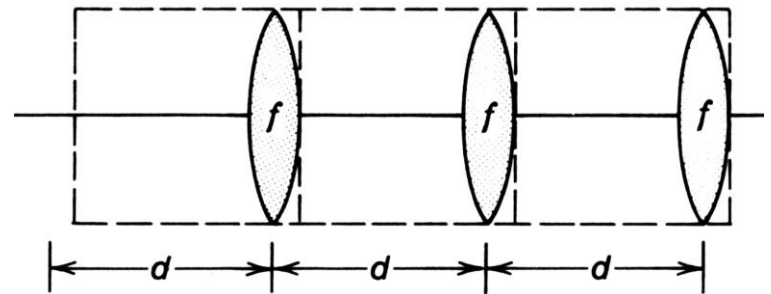
$$\mathbf{M}_{\text{ges}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{bmatrix}$$

Betrachte Abfolge von mehreren Einheitszellen:
Wie kann man damit identische Abbildungen erzielen ?

1) Zwei Einheitszellen

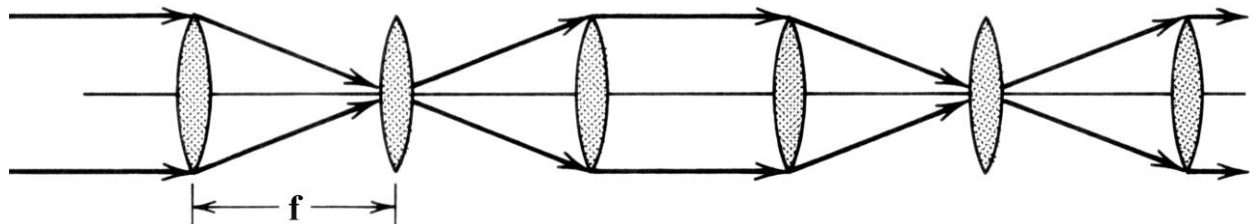
$$\begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - d/f & 2d - d^2/f \\ -2/f + d/f^2 & -d/f + (1 - d/f)^2 \end{bmatrix}$$

mit $d = 2f \Rightarrow \mathbf{M}^2 = -1 \Rightarrow \mathbf{M}^4 = 1$



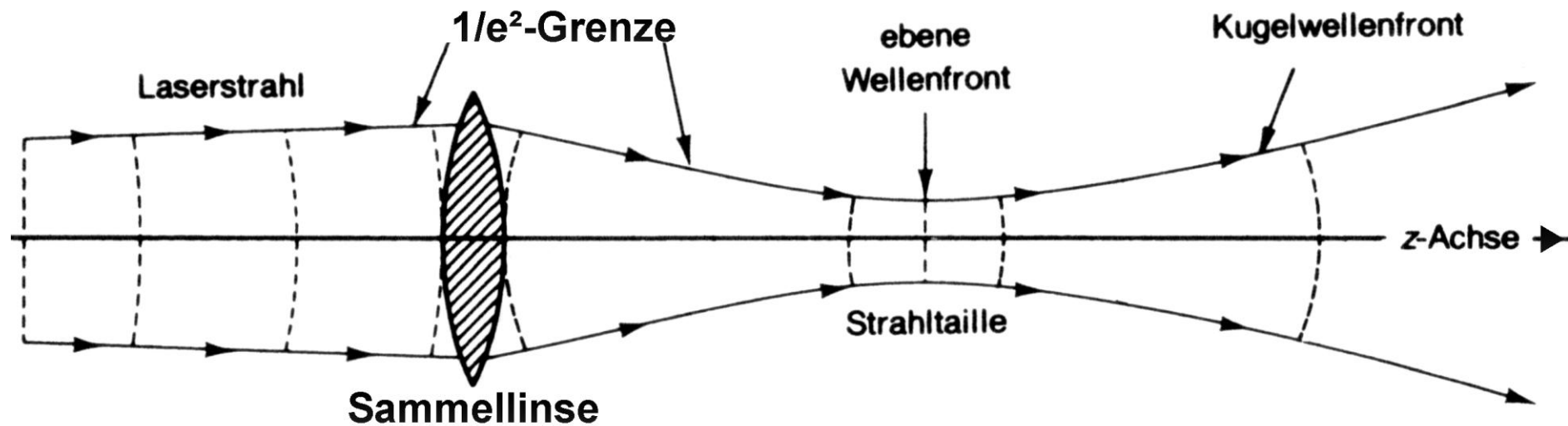
2) Drei Einheitszellen

mit $d = f \quad \mathbf{M}^3 = -1 \quad \mathbf{M}^6 = 1$



Teleskopisches System ist das Grundelement eines klassischen Endoskops

Gauß'scher Strahl (Laserstrahl)



Typischer Verlauf eines Laserstrahls in Strahlrichtung $E(x,y,z) = E_0(z) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}$

Laseraustritt: ebene Wellen ($R \rightarrow \infty$). Hieraus entwickeln sich Kugelwellen mit $R(z)$

Radius $R(z)$ der Kugelwellen wird von Sammellinse geändert: divergent $\rightarrow$ konvergent

Divergenter Strahl: $R > 0$, konvergenter Strahl $R < 0$)

Nach der Sammellinse folgt Strahltaile (engste Einschnürung, waist), die sich wieder aufweitet

Intensitätsverteilung senkrecht zur z-Achse an Stelle z: $I(x,y,z) = I_0(z) e^{-2\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} = I_0(z) e^{-2\frac{\rho^2}{w^2(z)}}$

Definition der Strahlgrenze $w(z) \perp$ zur z-Achse: für $x^2+y^2 = w^2(z) \Rightarrow I = I_0/e^2$ ($1/e^2 = 0,135$)

Innerhalb $I/I_0 = 1/e^2$ befinden sich 86,5 % der gesamten Strahlleistung, Strahlradius $w(z)$

Entwicklung Strahlradius $w(z)$ läßt sich, ausgehend von der Strahltaile, analytisch beschreiben

Strahlparameter Laserstrahl I

an Strahltaile ($z = 0$): $R = \infty$

Entwicklung Strahlradius $w(z)$,
ausgehend von Strahltaile w_0 :

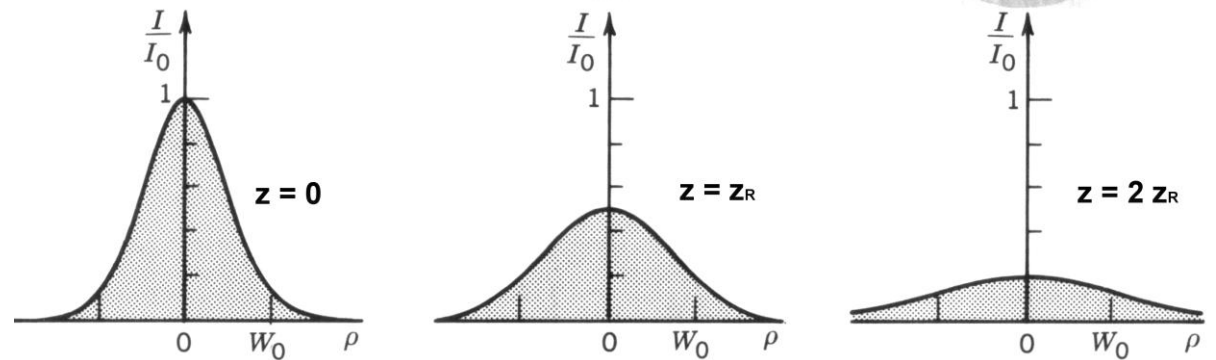
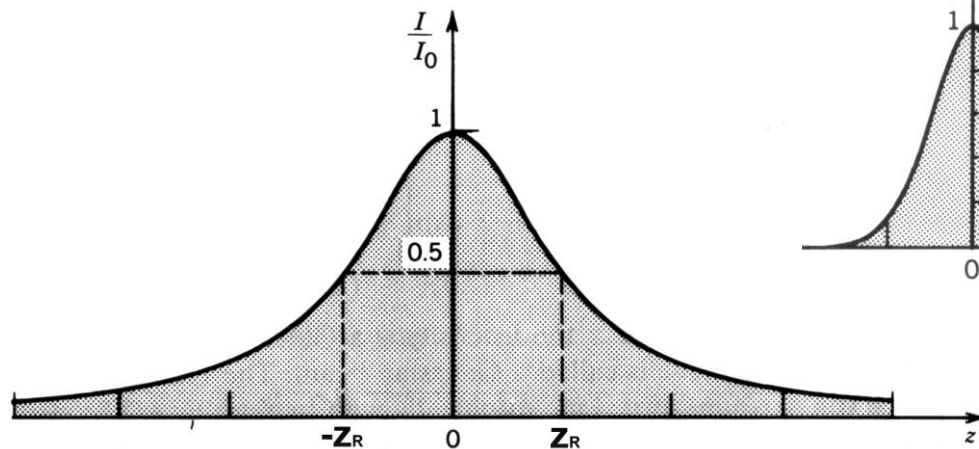
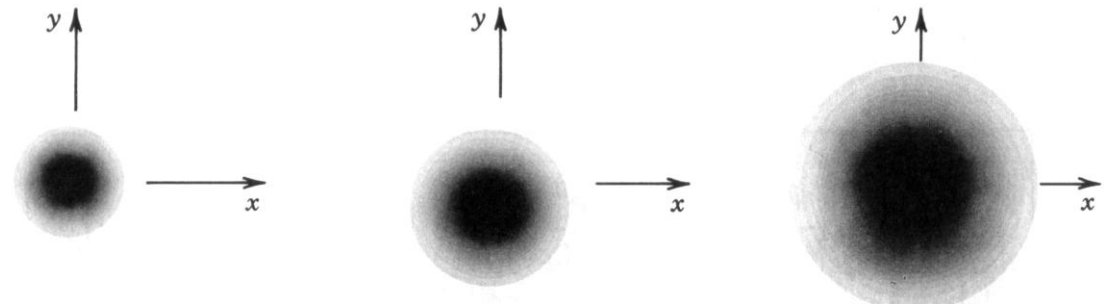
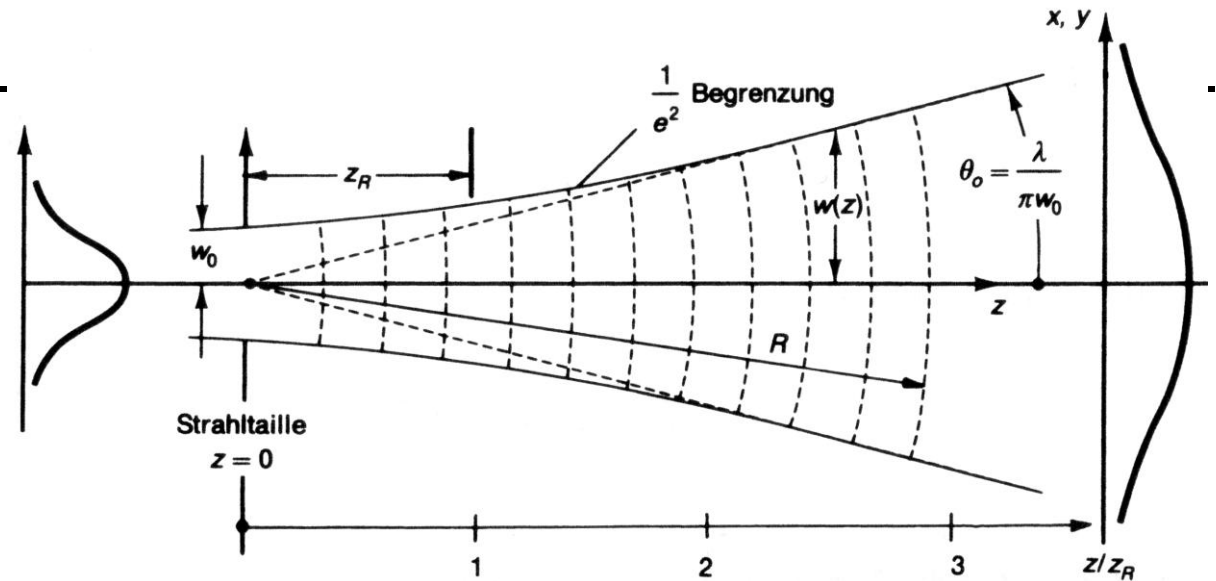
$$w(z) = w_0 [1 + (z/z_R)^2]^{1/2}$$

Intensität entlang der Strahlrichtung z :

$$I(\rho, z) = I_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right]^2 \exp\left[-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right]$$

$$I(0, z) = I_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right]^2 = \frac{I_0}{1 + (z/z_R)^2}$$

$$I(0, z_R) = I_0/2$$



Gesamtleistung Strahl:

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} I_0 (\pi w_0^2)$$

$$P = \int_0^\infty I(\rho, z) 2\pi \rho d\rho$$

unabhängig von z

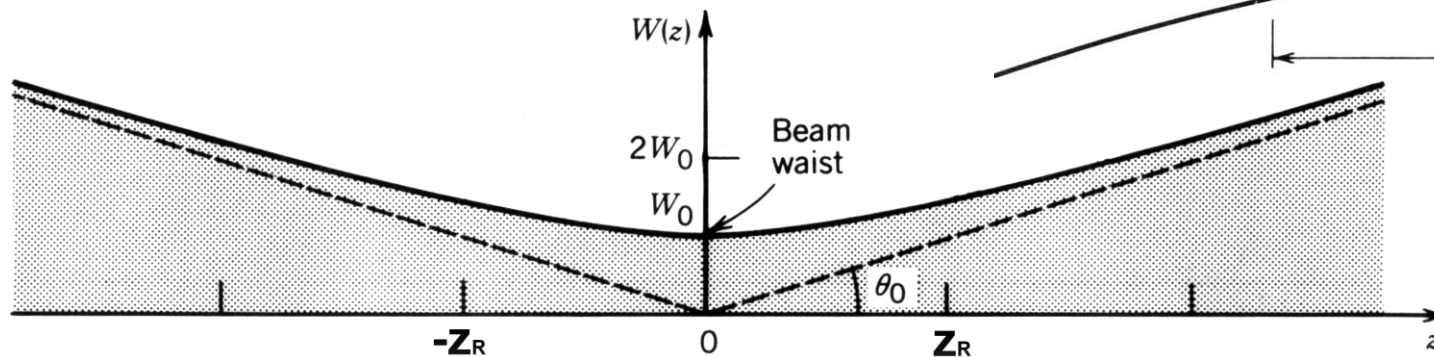
Strahlparameter Laserstrahl II

Strahlradius:

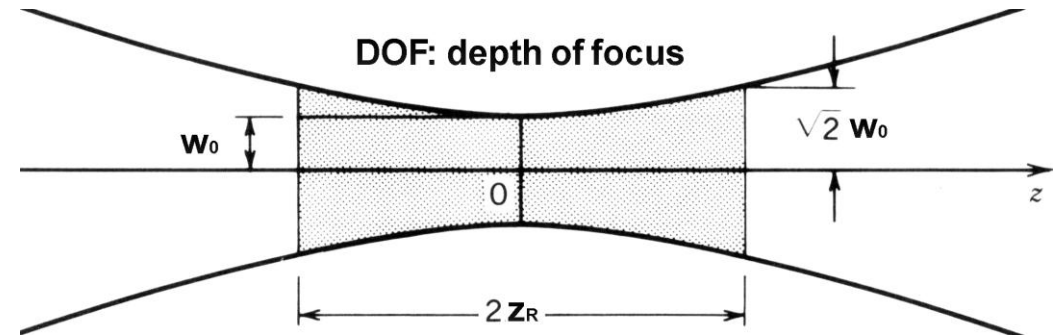
$$w(z) = w_0 [1 + (z/z_R)^2]^{1/2}$$

Rayleigh-Länge (Schärfentiefe) z_R :

von $z = 0$ wächst $w(z)$ nach z_R um $\sqrt{2}$



Nahfeld



Fernfeld ($z \gg z_R$): $w(z) = \theta_0 z$ mit dem halben Öffnungswinkel $\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ (Wellenlänge !)

Mit $w(z) = w_0 (z/z_R)$ für $z \gg z_R \Rightarrow \theta_0 = w_0/z_R$ (typisch mrad) $\Rightarrow z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$

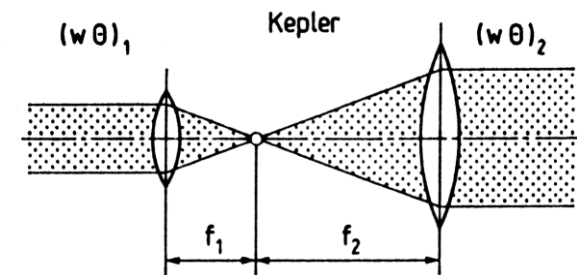
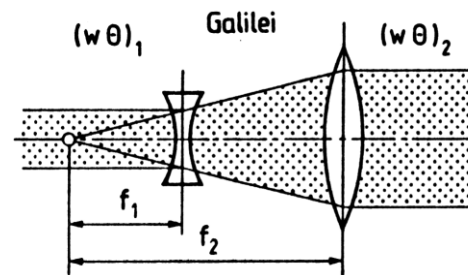
$$w(z) = w_0 z/z_R = \frac{\lambda}{\pi w_0} z$$

Strahlparameterprodukt:

$$\theta_0 w_0 = \lambda/\pi = \theta' w'$$

konstant, aber nur an „waist“ definiert !

$\Rightarrow$ mit größerem Strahlradius w verkleinert sich die Divergenz θ



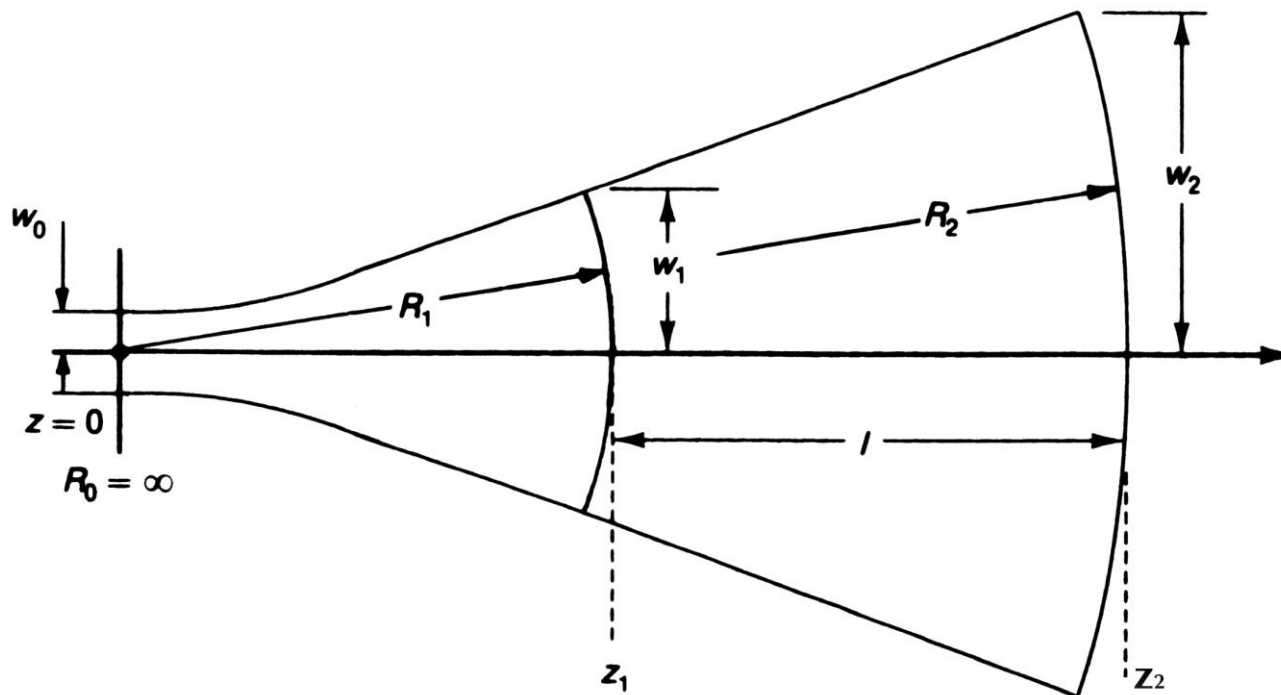
Strahlparameter Laserstrahl III

Beispiel: 1 mW He-Ne-Laser $\lambda = 633 \text{ nm}$ Strahldurchmesser an waist: $2 w_0 = 0,1 \text{ mm}$

doppelter Öffnungswinkel $2 \theta_0 = 2 \frac{\lambda}{\pi w_0} = 8,06 \text{ mrad} \Rightarrow \text{in } z = 1000 \text{ m } 2 w(z) = 2 \theta_0 z = 8 \text{ m}$

Rayleigh-Länge (Nahfeld): $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = 12,4 \text{ mm}$ Strahlparameterprodukt $\theta_0 w_0 = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ m rad}$

Fernfeldnäherung gültig für $z > 20 z_R$



Krümmungsradius Wellenfront:

$$R(z) = z + z_R^2/z$$

$$\text{z. B. } R(z_R) = z + z_R^2/z = 2 z_R$$

im Beispiel:

$$R(z_R) = 2 z_R = 24,8 \text{ mm}$$

$$R(2 z_R) = 5 z_R = 62 \text{ mm}$$

$$R(3 z_R) = 26 z_R = 322 \text{ mm}$$

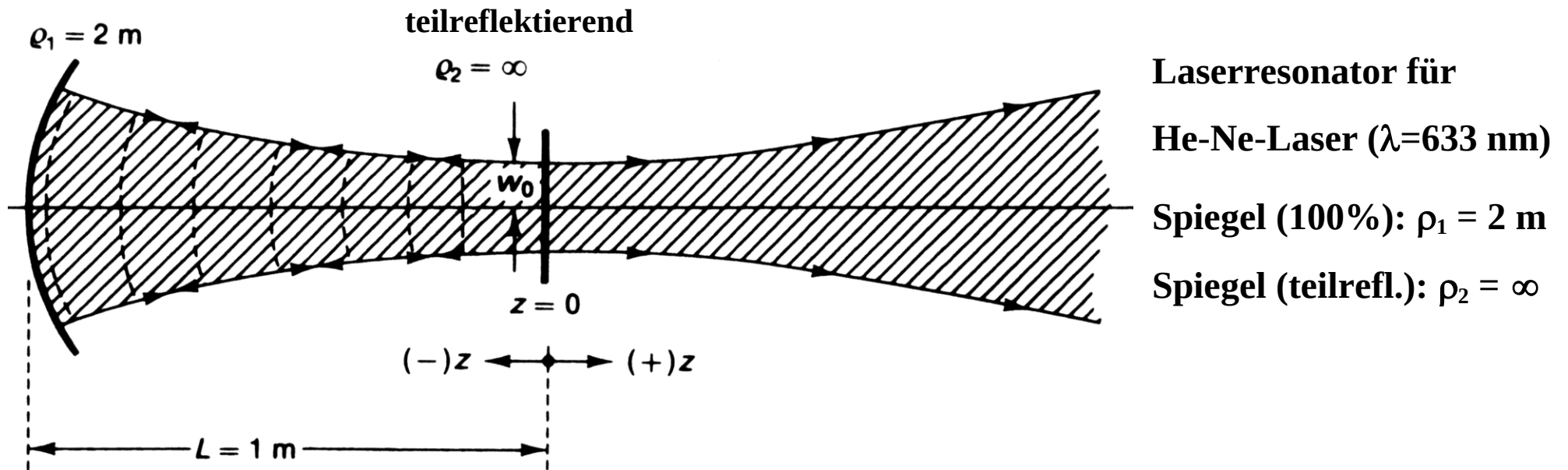
$R > 0$ für divergierenden Strahl

$R < 0$ für konvergierenden Strahl

Wegen $R(z) = z + z_R^2/z \Rightarrow R = \infty$ für $z = 0$

Fernfeld ($z > 20 z_R$): $R(z) = z$

Beispiel Laserresonator



Bei stabil arbeitendem Laser sind die Krümmungsradien der Wellenfronten und Spiegel gleich

=> gerade Wellenfronten am Austrittsspiegel ($R = \infty$) => dort Strahltaile

=> Rayleigh-Länge: mit $R(z) = z + z_R^2/z$ und $R(z = -1 \text{ m}) = -2 \text{ m}$ => $z_R = 1 \text{ m}$

mit $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ => Radius Strahltaile $w_0 = (z_R \lambda / \pi)^{1/2} = 0,45 \text{ mm}$

Strahlradius auf dem linken Laserspiegel: $w(z = -1 \text{ m}) = w_0 \sqrt{2} = 0,64 \text{ mm}$

Halber Öffnungswinkel: $\theta_0 = w_0/z_R = 0,45 \text{ mrad}$ (BESSY II: etwa $0,1 \text{ mrad}$)

Strahlparameterprodukt: $\theta_0 w_0 = 0,203 \text{ m rad}$

Ausbreitung eines Laserstrahls I

Vollständige Beschreibung des Laserstrahls mit komplexem Strahlparameter $\underline{q}(z)$

Es gilt:
$$\frac{1}{\underline{q}(z)} = \frac{1}{R} - j \frac{\lambda}{\pi w^2}$$

An $z = 0$: $\underline{q}_0 = j \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = j z_R$

An Stelle z_1 : $\underline{q}_1 = \underline{q}_0 + z_1$

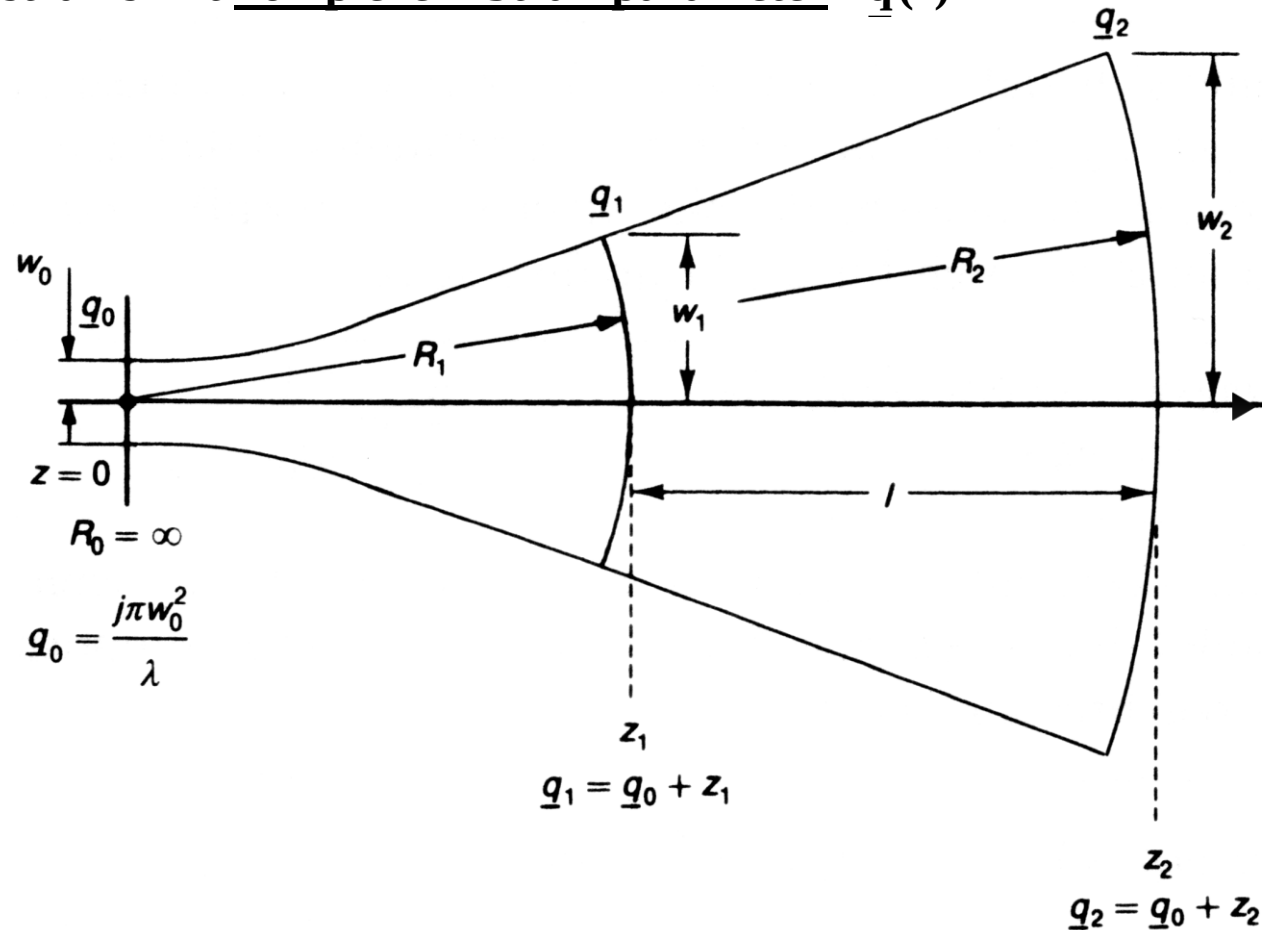
Verhalten Strahlparameter
Bei optischem System ABCD

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

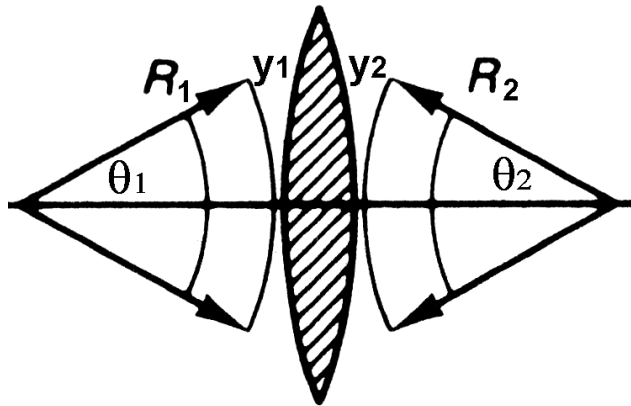
Strahlradius $R_1 = w_1/\theta_1$

$$\text{Strahlradius } R_2 = w_2/\theta_2 = \frac{\theta_1(A \frac{w_1}{\theta_1} + B)}{\theta_1(C \frac{w_1}{\theta_1} + D)} = \frac{A \cdot R_1 + B}{C \cdot R_1 + D}$$

z. B. Driftstrecke d : $R_2 = R_1 + d$



Ausbreitung eines Laserstrahls II



Wirkung einer dünnen Linse (direkt an Linse)

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D} \Rightarrow \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}$$

Wegen $\frac{1}{\underline{q}_1} = \frac{1}{R_1} - j \frac{\lambda}{\pi w_1^2}$ und

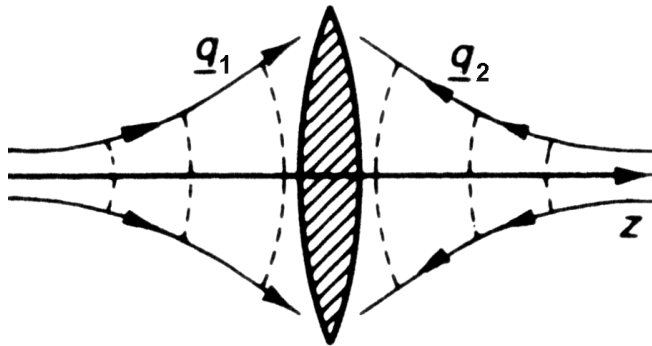
$$\frac{1}{\underline{q}_2} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \right) - j \frac{\lambda}{\pi w_1^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\underline{q}_2} = \frac{1}{R_2} - j \frac{\lambda}{\pi w_2^2}$$

$$\frac{1}{\underline{q}_2} = \frac{1}{\underline{q}_1} - \frac{1}{f}$$

sowie $w_1 = w_2 = w \Rightarrow$

$\Rightarrow$ formale Äquivalenz des Verhaltens der Radien R und der komplexen Strahlparameter $\underline{q}$:



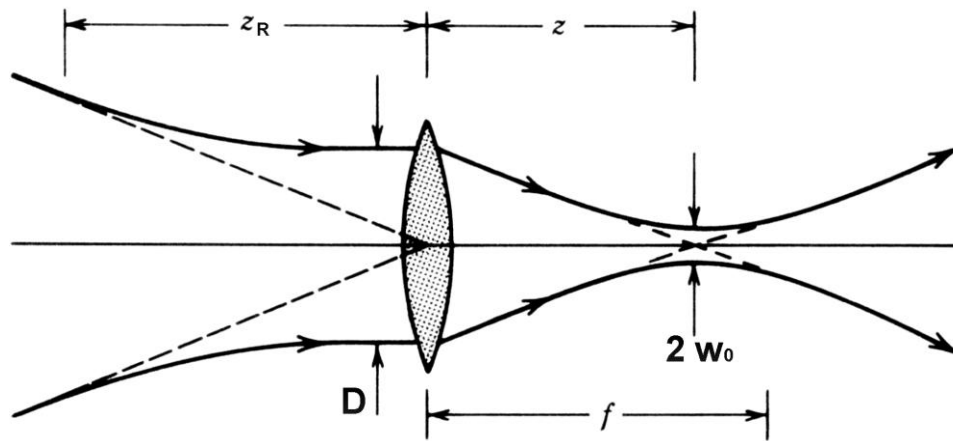
$$\underline{q}_2 = \frac{A\underline{q}_1 + B}{C\underline{q}_1 + D}$$

dünne Linse: $\underline{q}_2 = \frac{\underline{q}_1}{1 - \underline{q}_1 / f}$

oder auch : $\frac{1}{\underline{q}_2} = \frac{1}{\underline{q}_1} - \frac{1}{f}$

Bei Kenntnis von $\underline{q}_1$ am Eingang eines optischen Systems lässt sich die Form des Laserstrahls überall berechnen

Ausbreitung eines Laserstrahls III



Beispiel: waist an dünner Linse $\Rightarrow R_1 = \infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{\underline{q}_1} = \frac{1}{\infty} - j \frac{4\lambda}{\pi D^2} = -j \frac{4\lambda}{\pi D^2}$$

$$\text{mit } \underline{q}_2 = \frac{\underline{q}_1}{1 - \underline{q}_1/f} \Rightarrow \frac{1}{\underline{q}_2} = -\frac{1}{f} - j \frac{4\lambda}{\pi D^2}$$

$$\text{nach der Linse: } \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \Rightarrow R_2 = -f \quad (R_1 = \infty)$$

(Strahl konvergiert) beam waist bleibt $w = D/2$

Ort der Strahltaile nach der Linse:

aus $R(z) = z + z_R^2/z$ und $w^2(z) = w_0^2 [1 + (z/z_R)^2]$ mit $R(z)/w^2$ (lange Rechnung)

$$\Rightarrow z = \frac{R_2}{1 + (\lambda R_2 / \pi w^2)^2} = \frac{-f}{1 + (4\pi f / \pi D^2)^2} \quad \text{Ort der Strahltaile, befindet sich nicht am Fokus !}$$

$$\text{Durchmesser der Taille: aus } w_0^2 = \frac{w^2}{1 + (\pi w^2 / \lambda R_2)^2} \quad w_0^2 = \frac{D^2/4}{1 + (\pi D^2 / 4\lambda f)^2} \approx \frac{4\lambda^2 f^2}{D^2} \quad w_0 \approx \frac{2\lambda f}{D}$$

Strahl kann im Durchmesser nicht beliebig klein werden, Beugung !

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi w_0} \approx \frac{D}{2\pi f} \quad w_0 \text{ kleiner} \Rightarrow \theta_0 \text{ größer}$$

$$\text{depth of focus: } z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi \theta_0} \approx \left(\frac{2\lambda f}{D}\right)^2 \quad \text{Tiefenschärfe nimmt quadratisch ab !}$$

Beziehung der Strahlparameter

R_1 und w_1 seien an der Stelle z_1 bekannt

Wegen $\frac{1}{\underline{q}(z)} = \frac{1}{R} - j \frac{\lambda}{\pi w^2}$ sowie $\underline{q}_1 = z_1 + \underline{q}_0 = z_1 + j z_R \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{R_1} - j \frac{\lambda}{\pi w_1^2}} = z_1 + j z_R$

$\Rightarrow \frac{1/R_1}{(\frac{1}{R_1})^2 + (\frac{\lambda}{\pi w_1^2})^2} + j \frac{\frac{\lambda}{\pi w_1^2}}{(\frac{1}{R_1})^2 + (\frac{\lambda}{\pi w_1^2})^2} = z_1 + j z_R$ Vergleich von Real- und Imaginärteil

$\Rightarrow z_1 = \frac{R_1}{1 + (\frac{R_1 \lambda}{\pi w_1^2})^2}$ Abstand von der Strahltaile w_0

$\Rightarrow z_R = \frac{R_1^2 \frac{\lambda}{\pi w_1^2}}{1 + (\frac{R_1 \lambda}{\pi w_1^2})^2}$

mit $w_1 = w_0 [1 + (z_1/z_R)^2]^{1/2}$

$\Rightarrow w_0 = \frac{w_1}{[1 + (\pi w_1^2 / \lambda R_1)^2]^{1/2}}$

Rückberechnung der Strahltaile

